**SUBJECT: HUMAN DEVELOPMENT (HONOURS)**

**SEMESTER: 3RD**

**COURSE CODE: <u>HMDACOR06T</u>**

**ASSIGNED TOPIC:**

**<u>TOPIC- 6.</u>**

Concept, uses and computation of Bivariate Correlation.

**ASSIGNED TO:**

**DR. MAYURAKSHEE GANGOPADHYAY**
Assistant Professor
Department of Human Development
Dum Dum Motijheel College

# ২৪ সহগতি
# Correlation

শিক্ষাগত মূল্যায়নের জন্য শিক্ষার্থী সম্পর্কিত প্রাপ্ত তথ্যাবলিকে কীভাবে সুবিন্যস্ত করতে হয় এবং কীভাবে বিভিন্ন ধরনের রাশিবিজ্ঞানসম্মত কৌশল প্রয়োগ করে, সেগুলির তাৎপর্য নির্ণয় করতে হয়, সে বিষয়ে পূর্ববর্তী কয়েকটি অধ্যায়ে পর পর আলোচনা করা হয়েছে। কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপ (Measures of Central Tendency) বিষমতার পরিমাপ (Measures of Variability) ইত্যাদির দ্বারা বিশেষ কোনো পরিমাপের ক্ষেত্রে ব্যক্তিগত (Individual) বা দলগত (Group) তথ্যাবলির পৃথক পৃথক তাৎপর্য নির্ণয় করা সম্ভব হয়। যেমন একগুচ্ছ স্কোরের মধ্যে বিশেষ একটি স্কোরের তাৎপর্য কী তা সঠিক ভাবে উপলব্ধি করা যায়, ঐ স্কোরগুচ্ছের কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপ ও বিষমতার পরিমাপ বিচার করে। আবার, যে সব তাৎপর্য নির্ণায়ক লেখচিত্র (Interpretational graph) সম্পর্কে আলোচনা করা হয়েছে সেগুলির কাজ ও নির্দিষ্ট এক শ্রেণির পরিমাপের মধ্যে সীমাবদ্ধ। কিন্তু, শিক্ষাগত মূল্যায়ন ও পরিমাপের ক্ষেত্রে, বিভিন্নসূত্রে প্রাপ্ত শিক্ষার্থী সম্পর্কিত তথ্যাবলিকে অপর একটি দিক থেকেও বিচার করার প্রয়োজন হয়। সাধারণভাবে ব্যক্তিকে পর্যবেক্ষণ করলে দেখা যায়, তার এমন অনেক বৈশিষ্ট্য আছে, যেগুলি পরস্পর সম্পর্কযুক্ত। ঠিক একই ভাবে শিক্ষাক্ষেত্রে শিক্ষার্থীদের কোনো একটি বিষয়ের (Subject) পারদর্শিতা, অন্যান্য পাঠ্য বিষয়ের পারদর্শিতার সঙ্গে সম্পর্কযুক্ত হতে পারে। বাস্তবে এরকম ঘটনা অনেক সময়ই দেখা যায়। যেমন, যে সমস্ত শিক্ষার্থীদের গণিতের পারদর্শিতা ভালো, তারা ভৌতবিজ্ঞানে সাধারণতঃ ভালো পারদর্শিতা প্রদর্শন করে। আবার, এও দেখা যায়, যে সব শিক্ষার্থীরা সাহিত্য বা ইতিহাস ইত্যাদির মতো পাঠ্য বিষয়ে ভালো পারদর্শিতা অর্জন করে, তারা গণিত বা বিজ্ঞানে, সে অনুপাতে ভালো পারদর্শিতা প্রদর্শন করতে পারে না। অর্থাৎ, শিক্ষার্থীদের বিভিন্ন বিদ্যালয়-পাঠ্য বিষয়ের পারদর্শিতার পরিমাপগুলির মধ্যে কোনো কোনো ধরনের সম্পর্ক (Relation) থাকে। আর এই সম্পর্কের প্রকৃতি সম্পর্কে যদি সঠিক ধারণা থাকে, তবে শিক্ষাদানের কাজ পরিচালনা করা অনেক সহজ হয়। এই সম্পর্কের উপর ভিত্তি করে, সঠিক শিক্ষা-পরিকল্পনা (Educational planning) রচনা করা যায়। আবার কোনো কোনো ক্ষেত্রে একটি ক্ষেত্রের পরিমাপ সম্বন্ধে অবগত হয়ে অপর ক্ষেত্রের সম্ভাব্য পরিমাপ কী হতে পারে সে সম্পর্কেও ধারণা করা যায়। তাই শিক্ষাগত পরিমাপের ক্ষেত্রে বিভিন্ন সূত্রে প্রাপ্ত তথ্যাবলি বা স্কোরগুলির মধ্যেকার সঠিক সম্পর্ক নির্ণয় করার কাজ বিশেষ তাৎপর্যপূর্ণ। আলোচ্য অধ্যায়ে, দুটি পরিমাপের মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয়ের জন্য যে রাশিবৈজ্ঞানিক পদ্ধতি (Statistical Method) ব্যবহার করা হয়, সে বিষয়ে আলোচনা করা হবে। প্রস্তাবনা

## ॥ সহগতির ধারণা ॥
## CONCEPT OF CORRELATION

সহগতি কী ?

চিন্তাবিদ্‌গণ মনে করে, এই বিশ্ব-প্রকৃতির মধ্যে যা কিছু ঘটনা ঘটে, তারা পরস্পরের সঙ্গে সম্পর্কযুক্ত। কোনো কোনো ক্ষেত্রে এই সম্পর্ক ব্যক্ত, আবার, কোনো কোনো ক্ষেত্রে এই সম্পর্ক অব্যক্ত; বিশ্লেষণ ও যুক্তির মাধ্যমে তাকে খুঁজে বের করতে হয়। ঠিক একই ভাবে, যে-কোনো একটি মানবীয় বৈশিষ্ট্য অপরাপর বৈশিষ্ট্যের সঙ্গে সম্পর্কযুক্ত। গাণিতিক পরিভাষায় এই বৈশিষ্ট্য বা ঘটনাগুলিকে সাধারণ নামে বলা হয় **চল** (Variable)। তাই গাণিতিক অর্থে, যে-কোনো দুটি চলের (Variable) মধ্যে যে সম্পর্ক বর্তমান তাকেই বলা হয় **সহগতি** (Correlation)। যেমন— বিশ্বাস করা হয়, শিক্ষার্থীর বুদ্ধির মানের (Intelligence) সঙ্গে তার সামগ্রিক শিক্ষাগত পারদর্শিতার সম্পর্ক আছে। একে বলা হয়—বুদ্ধি ও শিক্ষাগত সহগতি

(Correlation between intelligence & educational achievement)। তেমনি, ইংরেজির পারদর্শিতার সঙ্গে গণিতের পারদর্শিতা সম্পর্কযুক্ত। তাদের এই সম্পর্ককে বলা হয় — ইংরেজি ও গণিতের পারদর্শিতার সহগতি (Correlation of performances in English and Mathematics.)।

সহগতির সহগাঙ্ক

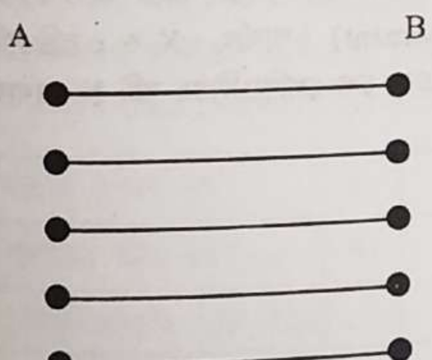
সাধারণক্ষেত্রে দুটি ঘটনা (Events), দুটি বৈশিষ্ট্য (Characteristics) বা দুটি চলের (Variables) মধ্যে সহগতির অস্তিত্ব অনুমান করা গেলেও, সেই সহগতির (Correlation) পরিমাণগত (Quantitative) এবং গুণগত বা প্রকৃতিগত (Qualitative) পার্থক্যকেও স্বীকার করা হয়। অর্থাৎ, সবক্ষেত্রে যে-কোনো দুটি চলের মধ্যেকার সম্পর্ক সমান হয় না এবং তাদের প্রকৃতিও সমান হয় না। কোনো দুটি চলের ক্ষেত্রে সহগতি বেশি থাকে আবার, কোনো দুটির ক্ষেত্রে কম থাকে। কোনো দুটি চলের মধ্যেকার সম্পর্ক, একে অপরের সহায়ক হয়; আবার, কোনো দুটি চলের মধ্যেকার সম্পর্কের জন্য একে অপরকে বিরোধিতা করে। যে গাণিতিক সূচক দ্বারা দুটি চলের মধ্যেকার সহগতির পরিমাণ ও গুণগত বৈশিষ্ট্য প্রকাশ করা হয়, তাকে বলা হয় **সহগতির সহগাঙ্ক** (Co-efficient of Correlation)। এই সহগাঙ্ককে সাধারণতঃ ইংরেজি 'r' অক্ষর দ্বারা সূচিত করা হয়। যে দুটি চলের (Variable) মধ্যে সহগতির সহগাঙ্ক নির্ণয় করা হয়, সে দুটিকে একত্রে বোঝানোর জন্য 'r' সংকেতের সঙ্গে চল দুটিরও সংকেত লেখা হয়। যেমন — X ও Y এই দুটি চলের মধ্যে সহগতির সহগাঙ্ক বোঝানোর জন্য লেখা হয় — $r_{xy}$ ; অনুরূপভাবে, A ও B দুটি চলের মধ্যেকার সহগাঙ্ককে লেখা হয়— $r_{ab}$ ইত্যাদি। বিখ্যাত চিন্তাবিদ্ স্যার ফ্রান্সিস্ গ্যাল্টন (Sir Francis Galton) এই সহগতির সহগাঙ্ক সম্পর্কে বিজ্ঞানসম্মত ধারণার প্রবর্তন করেন। ডারউইনের (Darwin) অভিব্যক্তিবাদের ধারণায় অনুপ্রাণিত হয়ে গ্যাল্টন, ব্যক্তিগত বৈষম্যের (Individual difference) প্রকৃতি ও তার পরিমাণ নির্ণয় করার চেষ্টা করেন। তিনি বেশ কিছু ব্যক্তির উচ্চতা (Height) এবং তাঁদের সন্তানদের উচ্চতা লেখচিত্রের (Graph) দুটি অক্ষে স্থাপন করে, তাদের এই উচ্চতার মধ্যে একটি সাধারণ সম্পর্ক লক্ষ্য করেন। তিনি দেখেন, পিতা ও সন্তানদের উচ্চতার সম্পর্ককে সবচেয়ে ভালোভাবে একটি সরলরৈখিক চিত্র (Straight line) দ্বারা প্রকাশ করা যায়। অর্থাৎ, গাণিতিক ভাবে একটি সরল রেখার সমীকরণের ($Y = mx + c$) মাধ্যমে বিভিন্ন ব্যক্তি ও তাদের সন্তানদের দৈহিক উচ্চতার ক্রমোন্নতি ও ক্রম-অবনতিকে প্রকাশ করা যায়। তিনি আরো লক্ষ্য করলেন এই সহগতির পরিমাণ সাধারণ ভাবে ঐ রেখাটির নতির (Gradient) দ্বারা সহজে বোঝা যায়। পরবর্তীকালে, গ্যাল্টনের পদ্ধতি অনুসরণ করে, তাঁরই সহকর্মী কার্ল পিয়ারসন (Karl Pearson) সহগতির সহগাঙ্ক-এর (Co-efficient of Correlation) ধারণাকে আরো বিস্তৃত করেন এবং এই সহগাঙ্ক (Co-efficient) নির্ণয়ের যে পদ্ধতি প্রবর্তন করেন, তাই বর্তমানে প্রচলিত আছে।

সহগতির সহগাঙ্কের মান

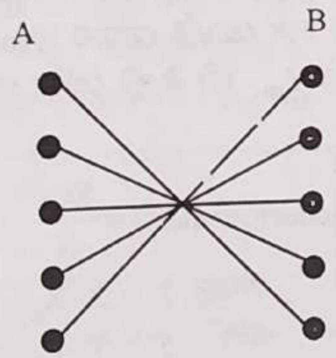
পিয়ারসনের ধারণা অনুযায়ী দুটি চলের মধ্যে যখন সহগতির সহগাঙ্ক (Co-efficient of correlation) নির্ণয় করা হয়, তখন সব সময় ধরে নেওয়া হয় যে ঐ দু'টি চলের (Variable) মধ্যে সরলরৈখিক সম্পর্কই (Linear relation) বর্তমান। এই সহগাঙ্ককে বলা হয় প্রোডাক্ট্ মোমেন্ট সহগাঙ্ক (Product moment co-efficient)। প্রকৃতপক্ষে এই মানটি দু'টি চলের সম্পর্কের পরিচায়ক উত্তম পরিবেশন রেখা (Line of best fit) একটি ধ্রুবক (Constant)। এর মান +1 থেকে –1 পর্যন্ত হতে পারে। যখন, দুটি চলের মধ্যে পরিপূর্ণ ধনাত্মক সহগতি থাকে, অর্থাৎ, একটির যে-কোনো পরিবর্তনের সঙ্গে সঙ্গে অপরটির সমপরিমাণ ও সমপ্রকৃতির পরিবর্তন হয়, তখন তাদের মধ্যে সহগাঙ্ক হয় +1, যেমন ধার যাক্ কোনো বিশেষ পরিস্থিতিতে লক্ষ্য করা গেল, কোনো বিশেষ শ্রেণিতে পাঠরত শিক্ষার্থীর মানসিক পরিণমন (Mental maturity) যে হারে ঘটেছে, সেই হারে তাদের পরীক্ষায় প্রাপ্ত নম্বরও বেড়েছে। এক্ষেত্রে মানসিক পরিণমন ও পরীক্ষার ফলের মধ্যে সহগতির সহগাঙ্ক +1। একটি ভৌতিক ঘটনার কথা উল্লেখ করলে, বিষয়টি আরো স্পষ্ট হবে। থার্মোমিটারের সাহায্যে যখন তাপমাত্রা (Temperature) পরিমাপ করা হয়, তখন তাপমাত্রা (Temperature) এবং থার্মোমিটারের পারদস্তম্ভের উচ্চতার (Height of mercury column) মধ্যে সম্পর্কস্থাপন করা হয়। এক্ষেত্রে পারদস্তম্ভের উচ্চতা বৃদ্ধি,

আনুপাতিক হারে তাপমাত্রা বৃদ্ধির পরিচায়ক। অর্থাৎ, দুটি ঘটনার মধ্যে পূর্ণ ধনাত্মক সম্পর্ক বর্তমান বা, তাদের মধ্যে সহগতির সহগাঙ্ক +1। আবার দুটি চলের মধ্যেকার সম্পর্ক সম্পূর্ণ বিপরীতধর্মী হতে পারে। অর্থাৎ, দু'টি চলের (Variable) মধ্যে সহগতির সহগাঙ্ক (Co-efficient of correlation) –1 হতে পারে। কোনো বিশেষ পরিস্থিতিতে দেখা গেল— যে সকল শিক্ষার্থীরা ইংরেজিতে ভালো নম্বর পেয়েছে, তারা আনুপাতিক হারে অঙ্কে তত খারাপ নম্বর পেয়েছে। বা, যারা অঙ্কে যেমন ভালো নম্বর পাচ্ছে, তারা তেমনি আনুপাতিক হারে ইংরেজিতে কম নম্বর পাচ্ছে। এক্ষেত্রে অঙ্ক ও ইংরেজির পারদর্শিতার মধ্যে সহগতির সহগাঙ্ক –1। অর্থাৎ, একটি চলের হ্রাস সমপরিমাণে অপর চলের বৃদ্ধি ঘটায়। একটি পাত্র থেকে যখন অপর একটি পাত্রে জল ঢালা হয়, তখন একটি পাত্রে যে পরিমাণ জল হ্রাস পায়, অপর পাত্রে সেই পরিমাণ জল বাড়তে থাকে। এক্ষেত্রে দুটি পাত্রে জলের আয়তনের মধ্যে সম্পর্ক সম্পূর্ণ ঋণাত্মক। আবার, কোনো কোনো সময় এমন পরিস্থিতিরও উদ্ভব হয়, যখন দুটি চল (Variable) সম্পূর্ণ স্বাধীনভাবে (Independently) কাজ করতে থাকে। অর্থাৎ, একটির কোনো পরিবর্তনই অপরটিকে কোনো ভাবেই প্রভাবিত করে না। এক্ষেত্রেও সাধারণ ধারণা অনুযায়ী সহগতির অনুমান থাকলে, সহগাঙ্কের (Co-efficient) মান হয় 0 (শূন্য)। সুতরাং, বলা যায়, যে-কোনো দু'টি চলের মধ্যে সহগতির সহগাঙ্ক নির্ণয় করা সম্ভব। এই সহগাঙ্কের মান দুটি চরমসীমা (Extream limit) +1 থেকে –1 এর মধ্যে যে-কোনো পর্যায়ে অবস্থান করতে পারে। **নীচে কয়েকটি চিত্রের মাধ্যমে সহগতির প্রকৃতির ব্যাখ্যা করা হল—**

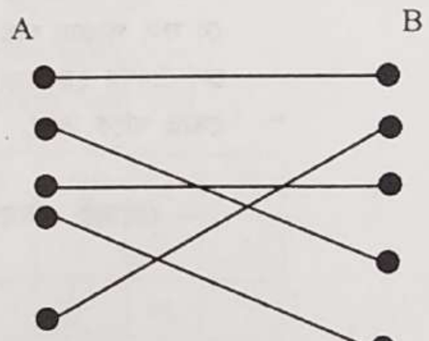
মনে করি, A-স্তম্ভে ও B-স্তম্ভে একদল শিক্ষার্থীর দুটি পাঠ্যবিষয়ের পরীক্ষায় প্রাপ্ত নম্বর দেওয়া আছে। প্রথম চিত্রে দেখা যাচ্ছে, যারা A বিষয়ে বেশি নম্বর পেয়েছে, তারা সকলেই B বিষয়েও বেশি নম্বর পেয়েছে। এক্ষেত্রে তাদের পারদর্শিতার মধ্যে সহগতির সহগাঙ্ক (r) ধনাত্মক এবং +1। দ্বিতীয় চিত্রে লক্ষ্য করা যাচ্ছে যারা A-বিষয়ে বেশি নম্বর পেয়েছে তারা B বিষয়ে কম নম্বর পেয়েছে। এক্ষেত্রে সহগতির সহগাঙ্ক (r) হবে ঋণাত্মক এবং –1। তৃতীয় চিত্রে লক্ষ্য করা যাচ্ছে A ও B স্তম্ভে প্রাপ্ত নম্বরের মধ্যে কোনো নির্দিষ্ট সম্পর্ক নেই। তবে একেবারে নেই বললে ভুল হবে। এক্ষেত্রে, সহগতির সহগাঙ্কের পরিমাণ +1 এর থেকে কম কিন্তু –1 এর থেকে বেশি। সাধারণতঃ সহগতির সহগাঙ্ককে (Co-efficient of correlation) একটি অনুপাত হিসেবে ধরা হয়। বিশেষভাবে যখন দুটি চলের (Variable) মধ্যে রৈখিক সম্পর্ক থাকে। অর্থাৎ, একটি চলের পরিবর্তনের সঙ্গে সঙ্গে অপর চলের যে পরিবর্তন ঘটছে, তারই অনুপাতকেই আপাতঃভাবে সহগাঙ্ক (Co-efficient) হিসেবে ধরা হয়। স্বাভাবিক পরিস্থিতিতে দুটি চলের মধ্যে পরিপূর্ণ ধনাত্মক (+1) বা পরিপূর্ণ ঋণাত্মক (–1) সহগতি নাও থাকতে পারে। তাদের সহগতি ·75; 15 বা –·88, –·12, ইত্যাদি যে-কোনো মানসম্পন্ন হতে পারে। সহগাঙ্কের এই চিহ্ন (Sign) থেকে, দুটি চলের মধ্যেকার সম্পর্কের প্রকৃতি (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক) সম্বন্ধে জানা যায় এবং তার সাংখ্যমান (Numerical value) দেখে সম্পর্কে মাত্রা বা পরিমাণ সম্বন্ধে ধারণা করা যায়।




১নং চিত্র




২নং চিত্র




৩ নং চিত্র

# একক ৩৭ □ দ্বিচল রাশিতথ্য বিশ্লেষণ ঃ সহগতি

গঠন



## ৩৭.০ উদ্দেশ্য

এই এককটি পাঠ করার পর আপনারা বুঝতে পারবেন—

- দ্বিচল রাশিতথ্য বিশ্লেষণের পদ্ধতিগুলি কী কী
- সহগতি মাপক ও আদর্শ সহগতি মাপকের ধর্ম
- সহগতি গুণাঙ্ক ও তার ধর্ম
- মানক্রম সহগতি গুণাঙ্ক সম্বন্ধে স্পিয়ারম্যান ও কেন্ডালের বক্তব্য

## ৩৭.১ প্রস্তাবনা

সমীক্ষার প্রয়োজনে অনেক সময় প্রতিটি ব্যষ্টির জন্য যুগপৎ দুটি লক্ষণের ওপর তথ্য সংগ্রহ করা হয়। যেমন পারিবারিক আয়-ব্যয়ক সংক্রান্ত সমীক্ষায় আমরা পরিবারের মাসিক আয় (চল x) এবং মাসিক আয়ের কত শতাংশ প্রসাধন সামগ্রীর জন্য ব্যয় করা হয় (চল ৬), সে সম্বন্ধে তথ্য সংগ্রহ করতে পারি। এক্ষেত্রে চল-

দু'টির মধ্যে একটিকে স্বতন্ত্র চল (independent variable) এবং অন্যটিকে নির্ভরী চল (dependent variable) হিসাবে গণ্য করা যেতে পারে। বর্তমান উদাহরণে x ও y যথাক্রমে স্বতন্ত্র এবং নির্ভরী চল।

লক্ষণ দু'টি বর্তমান উদাহরণের মত চল না হয়ে গুণলক্ষণও হতে পারে। যেমন, একটি কারখানায় উৎপন্ন প্রতিটি দ্রব্য সম্বন্ধে আমরা সেটির গুণমান (ত্রুটিযুক্ত অথবা ত্রুটিমুক্ত) এবং সেটি কোন্ শিফটে উৎপন্ন (সকাল, দুপুর অথবা রাত্রি), এ সংক্রান্ত তথ্য সংগ্রহ করতে পারি। আবার লক্ষণ দু'টির মধ্যে একটি গুণলক্ষণ এবং অন্যটি চল হতে পারে। কয়েকটি দেশের মানব-বিকাশ উন্নয়ন সংক্রান্ত অবস্থা (উচ্চ, মধ্য এবং নিম্ন মান) এবং ক্রয়ক্ষমতা সমতুল ডলারে (purchasing power parity \$) জাতীয় আয় সংক্রান্ত তথ্য এই তৃতীয় শ্রেণীর উদাহরণ। আমাদের বর্তমান আলোচনা সীমাবদ্ধ থাকবে দু'টি লক্ষণই যখন চল সেই ক্ষেত্রে।

দ্বিচল রাশিতথ্য বিশ্লেষণের বিভিন্ন পদ্ধতি নিয়ে আলোচনা করার আগে এ ধরনের তথ্য বিশ্লেষণের উদ্দেশ্য সম্বন্ধে আমাদের স্পষ্ট একটা ধারণা থাকা দরকার। আলাদা আলাদাভাবে চল দু'টির বিভিন্ন বৈশিষ্ট্যের ওপর আলোকপাত করা ছাড়াও এক্ষেত্রে আমাদের এক বা একাধিক উদ্দেশ্য থাকা সম্ভব। যেমন,

(ক) চল দু'টি পরস্পরের ওপর আদৌ নির্ভরশীল কিনা, তা পরীক্ষা করে দেখা।

(খ) যদি প্রাথমিক বিচারে দেখা যায় চল দু'টি পরস্পর নির্ভরশীল, তাহলে এই নির্ভরশীলতার প্রকৃতি এবং পরিমাণ নিরূপণ করা।

(গ) নির্ভরশীলতার সুস্পষ্ট প্রমাণ পাওয়া গেলে ভবিষ্যতে স্বতন্ত্র চলের নতুন কোন মানের জন্য নির্ভরী চলের প্রত্যাশিত মান নিরূপণ করা। এই উদ্দেশ্যে বিশ্লেষিত দ্বিচল রাশিতথ্য ব্যবহার করে নির্ভরী চলটিকে স্বতন্ত্র চলের একটি অপেক্ষকরূপে প্রকাশ করে একটি পূর্বানুমান সূত্র দাঁড় করানো যেতে পারে।

এইসব উদ্দেশ্য সামনে রেখে দ্বিচল রাশিতথ্য কীভাবে ধাপে ধাপে বিশ্লেষণ করা হবে, সে সম্বন্ধে বিস্তারিত আলোচনা করা হয়েছে পরবর্তী অনুচ্ছেদগুলিতে।

দু'টি চলের মধ্যে ঋজুরৈখিক সম্পর্ক থাকলে চল দু'টিকে সহগতিসম্পন্ন (correlated) বলা হয়। অর্থাৎ, সহগতি (correlation) হল, দু'টি চলের মধ্যে ঋজুরৈখিক সম্পর্ক। সহগতি ধনাত্মক এবং ঋণাত্মক দু'ধরনেরই হতে পারে।

যদি দেখা যায়, একটি চলের মান বাড়লে অন্যটির মধ্যে সাধারণভাবে বাড়ার, এবং একটির মান কমলে অন্যটিরও সাধারণভাবে কমার প্রবণতা রয়েছে (যেমন ক চিত্রে), তাহলে বলা হবে চল দু'টি ধনাত্মক সহগতি সম্পন্ন (positively correlated), অর্থাৎ এদের মধ্যে ধনাত্মক সহগতি রয়েছে। ধনাত্মক সহগতি সম্পন্ন চলের উদাহরণ হল পারিবারিক আয় ও বিলাসদ্রব্যের জন্য ব্যয়, দেশের জাতীয় আয় ও মানব-উন্নয়ন সূচক (Human Development Index), ছাত্রের গণিত ও রাশিবিজ্ঞানে প্রাপ্ত নম্বর, ইত্যাদি।

অন্যদিকে যদি দেখা যায় চল দু'টির মধ্যে একটির মান বাড়লে অন্যটির মান সাধারণভাবে কমার এবং একটির মান কমলে অন্যটির মান সাধারণভাবে বাড়ার প্রবণতা রয়েছে (চিত্র খ), তাহলে বলা হবে চল দু'টি ঋণাত্মক সহগতি সম্পন্ন (negatively correlated), অর্থাৎ, তাদের মধ্যে ঋণাত্মক সহগতি রয়েছে। ভোগ্যপণ্যের যোগান এবং বাজার দর, পরিবারের আয় ও খাদ্যদ্রব্যের জন্য ব্যয়িত আয়ের শতকরা অংশ— ইত্যাদি ঋণাত্মক সহগতি সম্পন্ন চলের উদাহরণ।

চল দু'টির যে কোন একটির মান বাড়লে অন্যটির মান যদি বাড়া বা কমার কোন নির্দিষ্ট প্রবণতা না থাকে, অর্থাৎ, x-এর মান বাড়লে y-এর মান বাড়া এবং কমার ঘটনা প্রায় সমান সংখ্যায় দেখা যায় (যেমন খ চিত্রে), তাহলে বলা হবে চল দু'টি সহগতিশূন্য (uncorrelated)। কৃষিজমির আয়তন এবং বিমা প্রতি ফলনের হার সহগতিশূন্য চলের উদাহরণ।

এখানে লক্ষ্যণীয়, দু'টি চল পরস্পর সম্পর্কশূন্য বা অনধীন হলে তারা সহগতিশূন্য হবে। তবে উল্টোটি

সত্য নয়, অর্থাৎ দু'টি চল সহগতিশূন্য হলে তারা পরস্পর অনধীন হতেও পারে, নাও হতে পারে— সুনির্দিষ্টভাবে কিছু বলা সম্ভব নয়। কেননা, সহগতিশূন্য কথাটির অর্থ সংশ্লিষ্ট চল দু'টির মধ্যে ঋজুরৈখিক সম্পর্ক নেই, তার অর্থ এই নয় যে, তাদের মধ্যে অন্য কোন ধরনের গাণিতিক সম্পর্ক (যথা, বৃত্তীয়, উপবৃত্তীয়, পরাবৃত্তীয় ইত্যাদি) থাকবে না। উদাহরণস্বরূপ বলা যায়, গ চিত্রটিতে স্পষ্টতই x ও y-এর মধ্যে একটি দ্বিঘাতজ সম্পর্ক রয়েছে। কিন্তু লক্ষ্য করলে দেখা যাবে, এখানে x-এর মান বাড়লে y কখনও বাড়ছে, কখনও কমছে।

সুতরাং দেখা যাচ্ছে, বিক্ষেপণ চিত্রে লব্ধ বিন্দুগুলির বিন্যাস থেকে সংশ্লিষ্ট চলদুটির সহগতি সম্বন্ধে একটা প্রাথমিক ধারণা পাওয়া যেতে পারে।

এখানে আর একটি কথা খেয়াল রাখা দরকার। দু'টি চলের মধ্যে সহগতির প্রকৃতি নির্ভর করে একটির মান বাড়ার সঙ্গে সঙ্গে অন্যটির মান পরিবর্তনের সাধারণ প্রবণতার ওপর। তার অর্থ এই নয় যে, ধনাত্মক সহগতি সম্পন্ন দু'টি চলের একটির মান বাড়লে অন্যটির মান সবসময় বাড়বে। বেশিরভাগ ক্ষেত্রে বাড়বে ঠিকই, তবে দু'চারটি ব্যতিক্রম থাকতেও পারে। যেমন, উপরের ক বিক্ষেপণ চিত্রে চল দু'টি ধনাত্মক সহগতি সম্পন্ন, কিন্তু এই চিত্রের M ও N বিন্দু দু'টি লক্ষ্য করলে দেখা যাবে, M-এর তুলনায় N-এ x-এর মান বেড়েছে বটে, কিন্তু y-এর মান কমেছে। তেমনি খ বিক্ষেপণ চিত্রটিতে চল দু'টি ঋণাত্মক সহগতি সম্পন্ন হলেও এখানে P বিন্দুর তুলনায় Q বিন্দুর x ও y উভয় চলের মানই বেড়েছে। সহগতির প্রকৃতি নির্ধারণে একটি চলের মান বাড়ার সঙ্গে অন্যটির মান বেশিরভাগ ক্ষেত্রে বাড়ছে না কমছে, অথবা গড়ে অপরিবর্তিত থাকছে, সেটিই হবে বিচার্য বিষয়।

## ৩৭.৩ সহগতি-মাপক (Measures of Correlation)

বিক্ষেপণ চিত্র থেকে যদি আভাস পাওয়া যায় দু'টি চলের মধ্যে আপাতগ্রাহ্য সহগতি রয়েছে, তাহলে বিশ্লেষণের পরবর্তী পর্যায়ে একটি উপযুক্ত মাপকের সাহায্যে এই সহগতির প্রকৃতি (ধনাত্মক, ঋণাত্মক, না শূন্য) এবং মাত্রা (কী পরিমাণে ধনাত্মক বা ঋণাত্মক) নির্ণয় করতে হবে।

### ৩৭.৩.১ আদর্শ সহগতি-মাপকের ধর্ম

একটি সহগতি-মাপকের নিম্নলিখিত ধর্মগুলি থাকলে সেটি একটি আদর্শ সহগতি-মাপক হিসাবে গণ্য হতে পারে :

(ক) একটি সংশ্লিষ্ট চল দু'টির মাপনা-একক নিরপেক্ষ হবে—নয়তো বিভিন্ন মাপনা-একক সম্পন্ন একাধিক স্বতন্ত্র চলের ওপর নির্ভরী চলের সহগতির মাত্রা পরস্পর তুলনীয় হবে না।

(খ) এটি n-এর, অর্থাৎ চল দু'টির যত জোড়া মানের ওপর ভিত্তি করে এর মান নির্ণয় করা হবে, তার ওপর নির্ভরশীল হবে না—অন্যথায়, n-এর মানে হ্রাসবৃদ্ধি ঘটিয়ে মাপকাঠির মান পরিবর্তন করা যাবে, যা আদৌ বাঞ্ছনীয় নয়।

(গ) এটি সংশ্লিষ্ট চল দু'টির মধ্যগামিতা (central tendency) এবং বিস্তৃতির (dispersion) ওপর নির্ভরশীল হবে না। কারণ হিসাবে উদাহরণ দিয়ে বলা যায়, গণিত ও রাশিবিজ্ঞানের নম্বরের মধ্যে সহগতি একটি পরীক্ষার ফল অনুসারে ভাল কলেজের ছাত্রদের প্রাপ্ত নম্বরের ভিত্তিতে যা হবে, একটি অপেক্ষাকৃত খারাপ কলেজের ছাত্রদের প্রাপ্ত নম্বরের ভিত্তিতেও মোটামুটি তাই হওয়া উচিত (ভালো কলেজটির ছাত্রদের নম্বরের গড় অন্য কলেজটির তুলনায় সাধারণত বেশি হবে, কিন্তু বিস্তৃতি হবে কম)।

(ঘ) ধনাত্মক, ঋণাত্মক এবং শূন্য সহগতির ক্ষেত্রে মাপকাঠির মান যথাক্রমে ধনাত্মক, ঋণাত্মক এবং শূন্য হবে। এর ফলে মাপকাঠির লব্ধ মানের গাণিতিক চিহ্ন থেকেই সহগতির প্রকৃতি বোঝা যাবে সহজেই।

(ঙ) একটি সসীম প্রসারের মধ্যে এটির মান সীমাবদ্ধ থাকবে। এর ফলে লব্ধ মানটিকে সংশ্লিষ্ট সীমা মানের সঙ্গে তুলনা করে সহগতির প্রকৃত মাত্রা সম্বন্ধে একটা স্বচ্ছ ধারণা পাওয়া যাবে

(চ) লব্ধ মানগুলির ক্রম অক্ষুণ্ণ রেখে যদি চল দু'টির কোন অভিন্ন রূপান্তর ঘটানো হয়, তাহলে মাপকাঠির মান অপরিবর্তিত থাকা বাঞ্ছনীয়।

## CORRELATION

প্র ③ সহগতি বলতে কি বোঝ? সহগতির প্রকারভেদ লেখো। সহগতির বৈশিষ্ট্যগুলি কি কি? সহগতি পরিমাপের একটি পদ্ধতির উল্লেখ কর।

⇒ ■ **সহগতি:** দুটি বা তার বেশি চলের মধ্যে সম্পর্ক নির্ণায়ক রাশিবিজ্ঞানের একটি পদ্ধতি হল সহগতি। অর্থাৎ দুটি বা তার বেশি সংখ্যক চল একে অপরের সঙ্গে কী ধরনের সম্পর্কে সম্পর্কিত এবং সেই সম্পর্কের প্রকৃতি কি রকম তা সহগতির দ্বারা পরিমাপ করা যায়। রাশিবিজ্ঞানের সূত্রানুযায়ী নির্ণীত সহগতির মানকে সহগতির সহগাঙ্ক বা Correlation Coefficient বলে।

■ **প্রকারভেদ:** সহগতিতে পরিমাপক চলের সহসম্পর্ক, সহগাঙ্কের মান ও চলকের সংখ্যা অনুযায়ী সহগতি তিন প্রকার। যথা -

a) **সরল রৈখিক বা বক্ররৈখিক সহগতি:** দুইটি বা তার বেশি চলের মধ্যে সহগতি সরলরৈখিক বা বক্ররৈখিক হতে পারে। অর্থাৎ সহগতি নির্ণায়ক পদ্ধতিতে চলগুলির মধ্যেকার সম্পর্ক একটি সরলরেখার দ্বারা বোঝানো যেতে পারে বা বক্ররেখার দ্বারা বোঝানো যেতে পারে। যেমন - X, Y, Z চলগুলির মধ্যে সহগতি হতে পারে যা সরলরৈখিক

$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z$

হতে পারে যা বক্ররৈখিক। আবার,

$X \longrightarrow Y \swarrow$

b) ধনাত্মক বা ইতিবাচক ও ঋণাত্মক বা নেতিবাচক সহগতি:

সহগতি ইতিবাচক বা নেতিবাচক অর্থাৎ Positive বা Negitive হতে পারে। সহগতি ধনাত্মক হলে চলগুলি পরস্পর পরস্পরের সমপোষী হয় ও একই দিকে অগ্রসর হয়, অর্থাৎ চলগুলির কোনো একটির মান বাড়লে অপরটির মানও বাড়বে। আর সহগতি ঋণাত্মক হলে কোনো চলের মান বাড়লে অপরটির মান কমবে অর্থাৎ বীজগাণিতিক সূত্রানুযায়ী, + আর + = +

− আর − = +

+ আর − = −

প্রথমটি ধনাত্মক সম্পর্ক ও দ্বিতীয়টি ঋণাত্মক সম্পর্ক।

c) সরল অথবা বহু সহগতি:

সহগতি সরল বা বহু হতে পারে, অর্থাৎ যখন দুটি চলের মধ্যে সহগতি দেখা হয় তখন তা সরল সহগতি, যখন দুই এর বেশি চলের মধ্যে সহগতি দেখা হয় তখন তা বহু সহগতি। যেমন, বুদ্ধি ও বয়সের সহগতি সরল সহগতি, আবার বুদ্ধি, বয়স ও শিক্ষার সমন্বয়ে সহগতি বহু সহগতির উদাহরণ।

- বৈশিষ্ট্য:

i) সহগতি বিভিন্ন চলের মধ্যে বর্তমান সম্পর্ককে যাচাই করে।

ii) সহগতির মাধ্যমে কার্য-কারণ সম্পর্ক বোঝা যায় না।

iii) সহগতি একটি চল থেকে অন্য চলের মানকে নির্দেশ করতে পারে না।

iv) চলগুলি নিয়ন্ত্রিত না হলে সহগতির মান অনেক

বেশি যথাযথ হয়।

- সহগতি পরিমাপের একটি পদ্ধতি হল Product Moment Correlation, এটি দুটি চলের মধ্যকার সহগতি নির্ণয় করে, গণিতবিদ কার্ল পিয়ারসন (Karl Pearson) এই পদ্ধতিটি নির্ণয় করেছেন, রাশিবিজ্ঞানের পরিভাষায় এটিকে 'r' চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

formula বা সূত্র :

$$r = \frac{\sum (x-\bar{x})(y-\bar{y})}{(n-1) S_x S_y}$$